Spazi vettoriali

Esercizio 1 Determinare se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di R^3:

$$A = \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ x = z\}$$

$$B = \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ x = z+1\}$$

$$C = \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ x = z^2\}$$

$$D = \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ (x,y,z) = (y,x,x)\}$$

$$E = \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 = 0\}$$

$$F = \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ x^2-z^2 = 0 \text{ e } \ x+z = 0\}.$$

Dimostrazione. L'insieme A costituito dai vettori $(x,y,z) \in R^3$ tali che $x = z$. Poich A l'insieme delle soluzioni di una equazione lineare omogenea, A un sottospazio di R^3.
Verifichiamo direttamente che A un sottospazio di R^3.
Abbiamo:

$$A = \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ z = x\} = \{(a,b,a) \ : \ a,b \in R\}.$$

La somma di due vettori di A ancora un vettore in A, infatti:

$$(a,b,a)+(c,d,c) = (a+c,b+d,a+c) \in A \quad \forall (a,b,a),\ (c,d,c) \in A.$$

Il prodotto di un vettore di A per uno scalare ancora un vettore di A, infatti:

$$\lambda(a,b,a) = (\lambda a, \lambda b, \lambda a) \in A \quad \forall (a,b,a) \in A,\ \forall \lambda \in R.$$

Il sottoinsieme

$$B = \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ x = z+1\}$$

l'insieme delle soluzioni di una equazione lineare non omogenea e pertanto non un sottospazio. di R^3. Ø facile anche verificare che, per esempio, il vettore nullo non appartiene a B.

Il sottoinsieme C di R^3 costituito dai vettori della forma (a^2,b,a) al variare di a e b in R. Dati due vettori di C, $v_1 = (a^2,b,a)$ e $v_2 = (c^2,d,ca)$, il vettore somma
$v_1+v_2 = (a^2+c^2, b+d, a+c)$ in generale non un elemento di C. Infatti
$a^2+c^2 \neq (a+c)^2$ se a e c sono entrambi non nulli. Ne segue che C non chiuso rispetto alla somma e dunque non un sottospazio.

Il sottoinsieme D costituito dai vettori di R^3 che sono soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - x = 0 \\ z - x = 0 \end{cases}$$

pertanto un sottospazio di R^3. I suoi elementi sono i vettori della forma (a, a, a) al variare di a in R.

Il sottoinsieme E costituito dal solo vettore nullo, infatti l'equazione

$x^2 + y^2 + z^2 = 0$ soddisfatta solo per $x = y = z = 0$. Ne segue che E il sottospazio banale di R^3.

Infine il sottoinsieme F costituito dai vettori (x, y, z) di R^3 tali che

$$x^2 - z^2 = 0 \quad \text{e} \quad x + z = 0,$$

ovvero dai vettori di R^3 tali che

$$x + z = 0.$$

Un generico vettore di F si scrive allora come $(a, b, -a)$ per certi a e b in R. Si verifica facilmente che F chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare. Infatti:

$$(a, b, -a) + (c, d, -c) = (a + c, b + d, -(a + c)) \in F$$

e

$$\lambda(a, b, -a) = (\lambda a, \lambda b, -\lambda a) \qquad \forall (a, b, -a), (c, d, -c) \in F, \forall \lambda \in R.$$

Esercizio 2 Determinare una base del sottospazio di R^3 formato dalle soluzioni dell'equazione

$$x - 2y + 2z = 0$$

Dimostrazione. Le soluzioni dell'equazione sono tutti e soli i vettori di R^3 della forma $(2y - 2z, y, z)$ al variare di y e z in R. Ora:

$$\begin{aligned}(2y - 2z, y, z) &= (2y, y, 0) + (-2z, 0, z) \\ &= y(2, 1, 0) + z(-2, 0, 1),\end{aligned}$$

sicch l'insieme $\mathcal{B} = \{(2, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$ genera il sottospazio. Poich i vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti l'insieme $\mathcal{B}$ una base del sottospazio.

Esercizio 3 Sia W il sottoinsieme di R^3 definito come

$$W = \{(x, y, z) \in R^3 \ : \ (x, y, z) = (z, y, x)\}.$$

1. Provare che W un sottospazio di R^3.
2. Calcolare la dimensione di W e determinare una sua base $\mathcal{B}$.
3. Provare che il vettore $w = (3, 2, 3)$ appartiene a W e determinare le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Dimostrazione. Il sottoinsieme W costituito dalle soluzioni dell'equazione

$$x - z = 0$$

pertanto un sottospazio di R^3. Inoltre possiamo scrivere:

$$W = \{(a, b, a) \ : \ a, b \in R\}$$

Un generico vettore di W combinazione lineare dei vettori $v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (0, 1, 0)$ poich :

$$(a, b, a) = av_1 + bv_2.$$

I vettori v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti cos l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ una base di W e risulta $\dim(W) = 2$.

Infine il vettore $w = (3, 2, 3)$ appartiene a W perch la prima e la terza componente coincidono. Le sue coordinate rispetto alla base ordinata $\mathcal{B}$ sono rispettivamente 2 e 3:

$$3v_1 + 2v_2 = w.$$

Esercizio 4 Sia

$$S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

un sottoinsieme di vettori linermente indipendenti in uno spazio vettoriale reale V. Provare che anche

$$S' = \{2v_1, 2v_2, \dots, 2v_n\}$$

un sottoinsieme di vettori linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Per provare che i vettori di S' sono linearmente indipendenti supponiamo di avere una combinazione lineare uguale al vettore nullo e proviamo che allora i coefficienti della combinazione devono essere tutti nulli.

Supponiamo dunque di avere:

$$a_1(2v_1) + a_2(2v_2) + \cdots + a_n(2v_n) = 0.$$

Questo implica che sia:

$$(2a_1)v_1 + (2a_2)v_2 + \cdots + (2a_n)v_n = 0.$$

L'ultima equazione una combinazione lineare dei vettori di S uguale al vettore nullo. Poich S un sottoinsieme di vettori linearmente indipendenti, i coefficienti della combinazione devono essere tutti nulli, ovvero deve essere:

$$2a_i = 0, \qquad i = 1 \dots n,$$

e dunque

$$a_i = 0, \qquad i = 1 \dots n.$$

Abbiamo cos mostrato che

$$a_1(2v_1) + a_2(2v_2) + \cdots + a_n(2v_n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_i = 0, \quad i = 1 \dots n,$$

ovvero che l'unica combinazione lineare dei vettori di S' uguale al vettore nullo quella i cui coefficienti siano tutti nulli.

Esercizio 5 Dati i vettori di R^4:

- $v_1 = (4, 19, 7, -1)$
- $v_2 = (0, 2, 4, -4)$
- $v_3 = (0, 3, 1, 1)$
- $v_4 = (1, 1, 3, -5)$

sia V il sottospazio

$$V = \mathrm{Span}\,\{v_1, v_2, v_3, v_4\}.$$

Determinare una base di V.

Dimostrazione. La dimensione di V uguale al rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 19 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Una possibile riduzione per righe della matrice è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 19 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & -5 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 19 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -16 & 4 & -19 \\ 0 & -74 & 22 & -94 \\ 0 & -24 & 8 & -32 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -16 & 4 & -19 \\ 0 & 0 & 56 & -98 \\ 0 & 0 & 32 & -56 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -16 & 4 & -19 \\ 0 & 0 & 56 & -98 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimensione di V è uguale a 3. Inoltre i vettori v_1, v_2 e v_3 costituiscono una base per V. Per dimostrare l'ultima affermazione basta osservare che, dalla riduzione fatta sopra, segue che la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 19 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

ha rango 3. Un'altra scelta possibile per una base di V è $\{v_1, v_2, v_4\}$.

Esercizio 6 Sia S il sottoinsieme di R^3

$$S = \{(1,1,0),\ (0,1,1)\}.$$

Determinare i valori del parametro reale q per i quali

$$(1,1,q) \in \text{Span}\, S.$$

Dimostrazione. Si tratta di trovare i valori del parametro q per i quali il sistema:

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ q \end{pmatrix}$$

ha soluzione.

Il sistema si riscrive:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x + y = 1 \\ y = q \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ y = q, \end{cases}$$

ed ha soluzione se e solo se $q = 0$.

Esercizio 7 Siano dati i vettori di :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ k-2 \\ k+4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k-2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ k-1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare, al variare del parametro reale k, la dimensione e una base del sottospazio V generato da v_1, v_2 e v_3.
2. Determinare per quali valori del parametro reale k il vettore v_4 appartiene a V e, in tal caso, scrivere v_4 come combinazione lineare degli elementi di una base di V.

Dimostrazione. Per determinare la dimensione di V verifichiamo se i vettori v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti. Si tratta allora di determinare le soluzioni del sistema omogeneo

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0.$$

La matrice dei coefficienti del sistema :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & k-2 & 2 \\ -1 & k+4 & k-2 \end{pmatrix},$$

che, ridotta a gradino, diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & k-2 & 2 \\ -1 & k+4 & k-2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & k+2 & 0 \\ 0 & k+2 & k-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & k+2 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}.$$

Per $k \neq -2, 1$ il sistema ammette solo la soluzione banale dunque i vettori v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti. Questo significa che per $k \neq -2, 1$ la dimensione di V 3 (ovvero $V = R^3$) e una sua base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Se $k = -2$ o $k = 1$ invece i vettori v_1, v_2 e v_3 sono linearmente dipendenti dunque la dimensione di V minore di 3.

Per $k = -2$ abbiamo:

$$v_1 = (1, 2, -1), \quad v_2 = (-2, -4, 2), \quad v_3 = (1, 2, -4).$$

I vettori v_1 e v_3 sono linearmente indipendenti perch non sono proporzionali sicch la dimensione di V 2 e una sua base , per esempio, $\mathcal{B} = \{v_1, v_3\}$. Un'altra scelta possibile per una base di V l'insieme $\mathcal{B} = \{v_2, v_3\}$ mentre i vettori v_1 e v_2 non costituiscono una base di V perch sono dipendenti (proporzionali).

Infine per $k = 1$ abbiamo

$$v_1 = (1, 2, -1), \quad v_2 = (-2, -1, 5), \quad v_3 = (1, 2, -1).$$

Di nuovo i vettori v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, la dimensione di V 2 e una sua base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$.

Determiniamo ora i valori del parametro reale k per i quali il vettore v_4 combinazione lineare dei primi tre.

Per $k \neq -2, 1$ abbiamo visto che V coincide con R^3 e $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di R^3. Allora per $k \neq -2, 1$ il vettore v_4 sicuramente combinazione lineare di v_1, v_2, v_3. Per determinare i coefficienti della combinazione lineare risolviamo il sistema

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4.$$

La matrice completa associata al sistema :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & k-2 & 2 & 5 \\ -1 & k+4 & k-2 & k-1 \end{pmatrix},$$

che, ridotta a gradino, diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & k-2 & 2 & 5 \\ -1 & k+4 & k-2 & k-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & k+2 & 0 & -1 \\ 0 & k+2 & k-1 & k+2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & k+2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Per $k \neq -2, 1$ abbiamo una unica soluzione

$$x = 2\frac{k^2 + k - 1}{(k-1)(k+2)}, \quad y = -\frac{1}{k+2}, \quad z = \frac{k+1}{k-1}.$$

Per $k = -2$ consideriamo la base $\{v_1, v_3\}$ di V. Di nuovo dobbiamo risolvere il sistema

$$xv_1 + yv_3 = v_4.$$

La matrice del sistema :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

che, ridotta a gradino diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segue che il sistema non ha soluzioni ovvero v_4 non combinazione degli elementi di una base di V ovvero v_4 non appartiene a V.

Per $k = 1$ consideriamo la base $\{v_1, v_2\}$ e risolviamo il sistema

$$xv_1 + yv_2 = v_4.$$

La matrice del sistema :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

che, ridotta a gradino diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Come nel caso precedente si conclude che v_4 non appartiene a V.

Esercizio 8 Determinare i valori del parametro q per cui la somma dei sottospazi di R^3 :

$$W = \langle\{(1,2,0),(q,1,1)\}\rangle \quad \text{e} \quad U = \{(x,x,-x) \mid x \in R\}$$

una somma diretta.

Dimostrazione. La somma dei sottospazi W e U diretta se e solo se

$$W \cap U = \{(0,0,0)\}.$$

Supponiamo esista un vettore v in $W \cap U$, sar allora:

$$v = (a + bq, 2a + b, b) \quad \text{e} \quad v = (c, c, -c).$$

per certi a, b e c in R.

Allora deve anche essere:

$$\begin{cases} a + bq = c \\ 2a + b = c \\ b = -c \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} a = c \\ b = -c \\ qc = 0. \end{cases}$$

Se° $q \neq 0$ troviamo che° v deve essere il vettore nullo, mentre se° $q = 0$ ogni vettore della forma° $(c, c, -c)$ nell'intersezione.

Riassumendo la somma di° W e° U diretta se e solo se° $q = 0$.

Esercizio 9°° Provare che se $\mathcal{B}$,° $\mathcal{B}'$ sono basi di due sottospazi° W e W' di° R^n tali che° $W \cap W' = \{0\}$, allora° $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ base di° $W \oplus W'$.

Dimostrazione. Indichiamo con° $b_1, b_2, \ldots b_n$ gli elementi di° $\mathcal{B}$ e con° $e_1, e_2, \ldots e_m$ gli elementi di° $\mathcal{B}'$.

Proviamo che° $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}' = \{b_1, b_2, \ldots b_n, e_1, e_2, \ldots e_m\}$ genera° $W \oplus W'$.

Sia° w un vettore di° $W \oplus W'$, allora° $w = u + v$ con° $u \in W$ e° $v \in W'$. Poich ° $\mathcal{B}$ una base di° W, sar :°

$$u = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i \qquad a_i \in R,$$

e, poich ° $\mathcal{B}'$ una base di° W', sar anche:°

$$v = \sum_{j=0}^{m} c_j e_j \qquad c_j \in R.$$

Ne segue che :°

$$w = u + v = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i + \sum_{j=0}^{m} c_j e_j,$$

sicch ° $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ genera° $W \oplus W'$.

Ora proviamo che i vettori di° $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ sono linearmente indipendenti. Supponiamo di avere una loro combinazione lineare uguale al vettore nullo:°

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i + \sum_{j=0}^{m} \mu_j e_j = 0, \qquad \lambda_i, \mu_j \in R.$$

Allora

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i = \sum_{j=0}^{m} (-\mu_j) e_j,$$

dunque il vettore $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i$ appartiene a sia a W che a W'. Siccome la somma diretta deve essere

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i = 0.$$

D'altra parte $\mathcal{B}$ una base di W, dunque $\lambda_i = 0$, per $i = 1, \ldots n$. Ragionando nello stesso modo per il vettore $\sum_{j=0}^{m} (-\mu_j) e_j$, si trova che $\mu_j = 0$ per $j = 0, \ldots m$.

Esercizio 10 Date le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & -2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

provare che l'insieme $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ un insieme linearmente indipendente nello spazio delle matrici 2×3 a coefficienti reali.

Dimostrazione. Nello spazio delle matrici 2×3 a coefficienti reali il vettore nullo la matrice nulla. Per provare che l'insieme $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ un insieme linearmente indipendente, supponiamo di avere una combinazione lineare dei suoi elementi uguale alla matrice nulla:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deve allora essere

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0. \end{cases}$$

La matrice associata al sistema :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

che, ridotta a gradino, diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -46 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}.$$

Il sistema ammette una e una sola soluzione, necessariamente banale:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Esercizio 11 Provare che le seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono una base del sottospazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali formato dalle matrici simmetriche.

Dimostrazione. Una matrice 2×2 simmetrica della forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in R.$$

Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ generano il sottospazio delle matrici simmetriche perch :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre sono linearmente indipendenti perch l'uguaglianza:

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

implica $x = y = z = 0$.